# Continuité :

**Théorème des valeurs intermédiaires.** Soit $f$ une application d'un evn $(E, N)$ dans un evn $(E', N')$. Si $f$ est continue sur $E$, l'image d'un connexe par arcs de $E$ est un connexe par arcs de $E'$.
En particulier, si $f$ va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et est continue sur $\mathbb{R}$, l'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par $f$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

**Théorème (images réciproques d'ouverts ou de fermé).** $f$ va d'une partie $D$ d'un evn $(E, N)$ dans un evn $(E', N')$.
$f$ est continue sur $D$ si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de $(E', N')$ est un ouvert de $D$, c'est-à-dire l'intersection d'un ouvert de $E$ avec $D$.
$f$ est continue sur $D$ si et seulement si l'image réciproque de tout fermé de $(E', N')$ est un fermé de $D$, c'est-à-dire l'intersection d'un fermé de $E$ avec $D$.

**Théorème (image continue d'un compact).** $f$ va d'une partie $D$ d'un evn $(E, N)$ dans un evn $(E', N')$. Si $f$ est continue sur $D$, l'image directe d'un compact de $D$ est un compact de $(E', N')$.
En particulier, si $f$ va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et est continue sur $\mathbb{R}$, l'image d'un segment de $\mathbb{R}$ par $f$ est un segment de $\mathbb{R}$.

**Théorème de Heine.** Si $f$ est continue sur un compact, alors $f$ est uniformément continue sur ce compact.

**Théorème (continuité de la norme).** L'application $N : \begin{array}{ccc} (E, N) & \rightarrow & (\mathbb{R}, |\,|) \\ x & \mapsto & N(x) \end{array}$ est continue.

**Théorème (continuité d'une application linéaire).** $f$ est une application linéaire de $(E, \|\ \|_E)$ dans $(F, \|\ \|_F)$.
$f$ est continue sur $E$ si et seulement si $\exists k \in \mathbb{R}^+ / \ \forall x \in E,\ \|f(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E$.
Si $E$ est de dimension finie, toute application linéaire, forme linéaire, application multilinéaire …est continue sur $E$.

**Conséquence.** Les sev d'un evn de dimension finie sont fermés.

# Dérivation :

**Théorème de Rolle.** $f$ est une application définie sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $f$ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in ]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

**Théorème des accroissements finis.** $f$ est une application définie sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $f$ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in ]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.
Le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis sont faux pour les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ ou les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$.

**Théorème.** $f$ est une application définie sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si $f$ est continue sur $[a, b]$, de classe $C^1$ sur $]a, b]$ et si $f'$ a une limite réelle ou complexe en $a$, alors $f$ est de classe $C^1$ sur $[a, b]$.

**Formule de Taylor-Laplace.** Soit $f$ une application définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de classe $C^{n+1}$ sur $I$. Alors, pour tout $(a, b) \in I^2$,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b - a)^k + \int_a^b \frac{(b - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

**Inégalité des accroissements finis.** Soit $f$ une application définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, dérivable sur $I$. On suppose que $|f'|$ est majorée par le réel $M$ sur $I$. Alors, pour tout $(a, b) \in I^2$, $|f(b) - f(a)| \leqslant M|b - a|$.

**Inégalité de Taylor-Lagrange.** Soit $f$ une application définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n+1$ fois dérivable sur $I$. On suppose que $|f^{(n+1)}|$ est majorée par le réel $M_{n+1}$ sur $I$. Alors, pour tout $(a,b) \in I^2$,

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| \leqslant \frac{M_{n+1}(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!}.$$